Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине
« Основы технологии машиностроения»
для студентов направлений

15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

Энгельс 2023

Цель работы: изучить метод математического планирования эксперимента для получения линейной модели сложных технологических процессов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Выбор факторов

На технологические процессы влияет много различных факторов. Исследование каждого фактора в отдельности при условии, что все основные факторы стабилизируются, требует выполнения большого объема экспериментальной работы. Исследование влияет на процесс сразу нескольких факторов, и получение математической модели процесса с учетом их взаимовлияния позволяет существенно снизить трудоемкость эксперимента.

Исследуемые факторы должны соответствовать следующим требованиям:

- факторы должны быть управляемыми, т.е. позволяющими устанавливать требуемое значение фактора и поддерживать это значение в течение опыта;
- для любой пары факторов должно выполняться условие их совместимости, при котором возможное взаимное влияние факторов не должно вызывать нарушения технологического процесса или качества обработки;
- факторы должны быть независимыми и однозначными;
- факторы должны непосредственно воздействовать на исследуемый параметр;
- факторами технологического процесса могут быть параметры пространства и времени;
- механические, электрические, магнитные, тепловые, акустические параметры, а также параметры качества.

Двухуровневый полный факторный эксперимент (ПФЭ)

Полный факторный эксперимент проводится в том случае, когда он непродолжителен или требует небольших затрат. В этом случае в эксперимент включают факторы x_1, x_2, x_3,...,x_k (всего k факторов), для каждого из которых устанавливается только 2 уровня: верхний и нижний. Например, фактор x_1 - скорость продольной подачи стола плоскошлифовального станка – изменяется в пределах от 0,3 до 2 м/мин. У фактора x_1 нижний уровень – 0,3 м/мин; верхний – 2 м/мин, всего два уровня.

Поскольку факторы процесса разнородны и имеют различные единицы измерения, они приводятся к единой системе счисления путем перехода от действительных значений факторов к закодированным по формулам:

$$Z_i = lgX_i - lgX_{icp} / (lgX_{icp} - lgX_{imin}),$$
$$lgX_{icp} = (lgX_{max} + lgX_{min})/2.$$

После преобразований по указанным формулам верхний уровень имеет кодированное обозначение +1, нижний уровень –1. Для упрощения процедуры построения планов экспериментов цифры (единицы) опускаются и пишутся только их знаки:+ или -.

Затем строится план матрицы планирования эксперимента. Построение матрицы сводится к стандартной форме записи условий проведения эксперимента в виде таблицы, в строчках которой записываются данные опытов, а в столбцах – факторы (в закодированном виде + или -) с реализацией всех возможных комбинаций факторов. При этом в первом столбце таблицы следует менять знаки поочередно, во втором столбце чередовать их через 2, в третьем – через 4, в четвертом – через 8 и т.д. по степеням двойки. Количество всех сочетаний комбинаций уровней факторов определяется по формуле:

$$N = 2k,$$

где N – общее число различных точек в плане; 2 – число уровней; k – общее число факторов.

Например, если имеется два фактора Z_1 и Z_2, тогда, придавая каждому фактору два значения (верхний (+) и нижний (-)) получим все возможные сочетания уровней неполного плана матрицы планирования 2 (табл.1).

Таблица 1

Неполный план матрицы планирования 2^2

Номер точки плана	Факторы	
	Z_1	Z_2
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

Для составления плана матрицы для трех факторов (Z_1, Z_2, Z_3) приведенную выше матрицу для 2^z повторяют дважды: один раз при значениях x, находящихся на нижнем уровне, второй раз – при значениях x, находящихся на верхнем уровне (табл. 2).

Таблица 2

Неполный план матрицы планирования 2^3

Номер точки плана	Факторы		
	Z_1	Z_2	Z_3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Если же будет рассмотрен 4-й фактор $Z_{4,}$ то аналогичным образом будет повторено планирование для 3 переменных (табл. 2): один раз – для фактора Z_4, находящегося на нижнем уровне, второй раз –для $Z_{4,}$ находящегося на верхнем уровне.

Аналогично получается план матрицы планирования для 5, 10 и т.д. факторов, то есть для любого числа факторов.

Неполный план матрицы планирования эксперимента даёт возможность рассчитать коэффициенты факторов процесса $b_1 \rightarrow z_1$, $b_2 \rightarrow z_2$, $b_3 \rightarrow z_3$ …$b_n \rightarrow z_n$, однако этих коэффициентов недостаточно, чтобы получить уравнение регрессии, в котором помимо линейных членов будут члены учитывающие эффект взаимного межфакторного взаимодействия.

Так, полный план ПФЭ2^2 даёт возможность рассчитать 4 коэффициента уравнения регрессии:

$$y=b_0+b_1z_1+b_2z_2+b_{12}z_1z_2.$$

План ПФЭ2^3 позволяет рассчитать 8 коэффициентов уравнения регрессии.

$$y=b_0+b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3+b_{12}z_1z_2+b_{13}z_1z_3+b_{23}z_2z_3+b_{123}z_1z_2z_3..$$

План ПФЭ2^4 даёт возможность получить оценки 16 коэффициентов уравнения регрессии:

$$y=b_0+b_1z_1+b_2z_2+b_2z_3+b_4z_4+b_{12}z_1z_2+b_{13}z_1z_3+b_{14}z_1z_4+b_{23}z_2z_3+b_{24}z_2z_4+b_{34}z_3z_4+$$
$$+b_{123}z_1z_2z_3+b_{124}z_1z_2z_4+b_{134}z_1z_3z_4+b_{1234}z_1z_2z_3z_4..$$

План ПФЭ2^5 имеет N=32 и, следовательно, даёт возможность получить уравнение регрессии с 32 коэффициентами и т.д. Чтобы получить полный план матрицы планирования для неполного плана, в таблицу добавить 1 столбец с фиктивной переменной Z_0 для оценки свободного члена b_0 (значение Z_0 всегда одинаково во всех строках и равно +1) и столбцы со всевозможными комбинациями произведений факторов, которые позволят оценить эффекты взаимодействия факторов.

Например, полный план ПФЭ2^3 приведён в табл.3.

Таблица 3

Полный план матрицы планирования 2^3

Номер точки плана	Значения основных факторов				Комбинации произведений факторов			
	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1Z_2	$Z_1 Z_3$	$Z_2 Z_3$	$Z_1Z_2Z_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ), равный $2^{к-р}$

При достаточно большом числе факторов (к > 5) трудоемкость полного факторного эксперимента ПФЭ$2^к$ при к>5 является неэкономичным. В связи с этим появляется возможность расчетный столбец взаимодействия, эффект которого заранее считают незначимым, использовать для дополнительного фактора. Достроенные на такой основе планы будут называться планами дробного эксперимента ДФЭ$^{к-р}$. Эти планы в своей основе имеют план полного факторного эксперимента для числа факторов меньше числа принятых к исследованию на 1, 2 и т.д. (р=1, 2 и т.д.).

Таблица 4

План матрицы планирования 2^{7-4}

Номер точки плана	Значения факторов в кодовых обозначениях							
	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	$Z_4=Z_1Z_2$	$Z_3=Z_1Z_3$	$Z_6=Z_2Z_3$	$Z_7=Z_1Z_2Z_3$
1	+	-	-	-	+	+	+	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	+	-	+	-	-	-
5	+	-	-	+	+	-	-	+
6	+	+	-	+	-	+	-	-
7	+	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Например, если в ПФЭ^3 один из факторов взаимодействия Z_1Z_2, $Z_1 Z_3$, Z_2

Z_3, $Z_1Z_2Z_3$ заменить четвертым фактором Z_4, то получим половину 2^{4-1} от ПФЭ2^3. Если два эффекта взаимодействия заменить факторами Z_4 и Z_5 ,то получим ¼ 2^{5-2} от ПФЭ2^3. Можно аналогично получить 1/8 от ПФЭ$^{b-3}$, заменив три эффекта взаимодействия факторами Z^4 Z^5 Z^6 .
Если заменить 4 эффекта взаимодействия факторами Z^4, Z^5, Z^6, то получим 1/16 2^{7-4} от ПФЭ (табл. 4).

Пользуясь таким планированием и проведя эксперимент, можно вычислить коэффициенты факторов или параметры уравнения регрессии:

$$y=b_0+b_1z_1+b_2z_2+b_3z_3+b_4z_4+b_5z_5+b_6z_6+b_7z_7.$$

Проверка планов матриц планирования ПФЭ=$2^к$ и ДФЭ=$2^{к-р}$

После построения плана матрицы планирования необходимо ее проверить по следующим критериям:

а) симметричность относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма элементов столбца каждого фактора должна быть равна нулю, кроме столбца, соответствующего свободному члену;

б) нормировка – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу точек плана матрицы;

в) ортогональность – сумма построчных произведений плана матрицы двух любых столбцов равна нулю.

Если план матрицы планирования отвечает указанным свойствам, то математическая модель, полученная в результате эксперимента способна предсказать значение параметра с одинаковой точностью в любых направлениях на равных расстояниях от центра эксперимента или плана матрицы.

Проведение эксперимента ПФЭ или ДФЭ

Для записи сведений о факторах процесса записи верхних, нижних уровней факторов, интервалов варьирования и результатов эксперимента подготавливается журнал планирования эксперимента по форме, приведенной в приложении.

Обработка результатов эксперимента

Методами ДФЭ и ПФЭ можно получить описание изучаемого процесса в виде линейного уравнения:

$$y=b_0+b_1z_1+b_2z_2+\ldots+b_nz_n.$$

Для определения параметров модели процесса или коэффициентов регрессии b_0, b_1, b_2,…b_n необходимо использовать средние результаты опытов:

$$b_{iv}=\sum z_{iv}Y_{cp}/N,$$

где z_{iv} – номер столбца в плане матрицы (0,1,2…к); y_{cp} – среднее арифметическое по m опытам в точке с номером; N – общее число различных точек

в плане матрицы.

Определение выхода процесса (y_1,y_2,y_3) и обеспечение заданного уровня факторов в каждом опыте осуществляется не точно, с какой-то ошибкой. Следовательно, с какой-то ошибкой будут определяться и коэффициенты уравнения регрессии $b_0, b_1, b_2,\ldots, b_n$.

Для определения степени соответствия математической модели реальному процессу необходимо провести статистический анализ уравнения и проверить его адекватность экспериментальным данным. При равном числе параллельных опытов во всех точках плана матрицы дисперсию ошибки определения коэффициента регрессии S_{bi}^2 определяют по формуле:

$$S_{bi}^2 = S^2(y)/(Nm(m-1)),$$

где $S^2(y)$ – средняя для всего эксперимента дисперсия воспроизводимости среднего значения выхода; N – общее число различных точек в плане матрицы; m – число параллельных наблюдений в каждой точке.

Затем определяется значимость коэффициентов регрессии. Для этого для каждого коэффициента вычисляют значение t_i критерия Стьюдента t_i по формуле:

$$t_i=b_i/S(b_i),$$

где b_i – рассчитанные коэффициенты регрессии; $S(b_i)$ – среднеквадратичное отклонение дисперсий коэффициента регрессии.

Проверка гипотезы значимости коэффициента b_i производится следующим образом. Задается уровень значимости q=5% (это означает, что вероятность получения достоверного результата составляет 95%). Определяется число степени свободы V=N(m-1) и по таблице критериев Стьюдента (приложение 2) находим критическое значение $t_{кр}$. Затем сравнивают значения t_i и $t_{кр}$. Если расчетное значение t_i, определенное по формуле, окажется больше значения $t_{кр}$, найденного из таблицы приложения, то коэффициент b_i признается значимым. В противном случае b_i считается статистически незначимым и отбрасывается.

После проверки значимости каждого коэффициента регрессии по приведенной методике составляется окончательно математическая модель техпроцесса, куда включаются значимые коэффициенты:

$$y=b_0+b_iz_i+b_2z_2+\ldots+b_kz_k,$$

где y^ - математическое ожидание (среднее значение) исследуемого параметра техпроцесса; b_i – коэффициенты параметров модели; z_i – факторы процесса.

Если в уравнении после проверки значимости коэффициентов останутся все N коэффициентов, то проверка математической модели на адекватность экспериментальным данным теряет смысл. Если же число значимых коэффициентов хотя бы на единицу меньше числа опытов, то появляется необходимость статистической проверки адекватности уравнения.

Эта проверка осуществляется по критерию Фишера в следующей последовательности:

1) рассчитывают выход y^ для каждого варианта опыта по уравнению, из которого исключены незначимые члены;

2) находится разность (y^-y);

3) рассчитывается дисперсия неадекватности по формуле:

$$S_{ад}^2=\sum(y^{\wedge}-y)/(N-N^1),$$

где N^1 – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

4) рассчитывают F – отношение (критерий Фишера) по формуле:

$$F=S_{ад}^2/S^2(y);$$

5) сравнивают полученное значение F – отношения с табличным значением $F_{кр}$ для определенного числа степеней свободы и заданного уровня значимости (приложение 3).

Для проверки гипотезы неадекватности модели задается уровень значимости q=5% и определяется число степеней свободы f_1и f_2 по формулам:

$$f_1=N-N^1;\ f_2=N(m-1).$$

Если расчетное значение критерия F окажется меньше значения $F_{кр}$, то гипотеза адекватности модели принимается.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Получить у преподавателя экспериментальную таблицу ПФЭ.
2. Провести обработку результатов экспериментов. Определить значение коэффициентов регрессии и составить уравнение регрессии.
3. Произвести проверку на соответствие (адекватность) полученной теоретической зависимости экспериментальным данным.
4. Сделать выводы.

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1) план эксперимента;

2) уравнение регрессии и линейная модель процесса;

3) обработка результатов и проверка адекватности модели;

4) выводы по работе.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Полный и дробный факторные эксперименты.
2. Полный и неполный план матрицы планирования.
3. Проверка правильности составления матрицы планов ПФЭ и ДФЭ.
4. Определение коэффициентов регрессии.
5. Определение значимости коэффициентов регрессии.
6. Проверка модели процесса на адекватность.

ПРИМЕР

Рассчитать коэффициенты уравнения процесса по результатам реализации плана ПФЭ2, представленным в таблице.

Таблица 5

Неполный план матрицы планирования ПФЭ 2^3

№	Основные столбцы			Выход процесса			
	Z_1	Z_2	Z_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y
1	-	-	-	73	69	68	70
2	-	+	-	58	58	64	60
3	+	-	-	54	59	52	55
4	+	+	-	84	94	92	90
5	-	-	+	100	106	109	105
6	-	+	+	98	90	97	95
7	+	-	+	77	85	78	80
8	+	+	+	105	95	100	100

Рассчитаем коэффициенты уравнения по средним результатам y, пользуясь соответствующими формулами:

$$b_0=\sum y/N=(70+60+55+90+105+95+80+100)/8=81,875;$$

$$b_1=\sum z_{1i}/N=(-70-60+55+90-105-95+80+100)/8=-0,625;$$

$$b_2=\sum z_{2i}/N=(-70+60-55+90-105+95-80+100)/8=4,375;$$

$$b_3=\sum z_{3i}/N=(-70-60-55-90+105+95+80+100)/8=13,125.$$

Следовательно, уравнение процесса будет иметь вид:

$$y=81,75-0,625z_1+4,375z_2+13,125z_3.$$

Определим значимость коэффициентов уравнения, для чего рассчитываем среднюю дисперсию для всего эксперимента:

$$S^2(y)=(73-70)^2+(69-70)^2+(68-70)^2+(58-60)^2+(64-60)^2+(58-60)^2+(54-55)^2+$$
$$+(59-55)^2+(52-55)^2+(84-90)^2+(94-90)^2+(92-90)^2+(100-105)^2+(106-105)^2+$$
$$+(109-105)^2+(98-95)^2+(90-95)^2+(97-95)^2+(77-80)^2+(85-80)^2+(78-80)^2+$$
$$+(105-100)^2+(95-100)^2+(100-100)^2;$$

$$S^2(y)=288;$$

$$S^2(b_i)=288/8\ 3\ 2=6;$$

$$S(b_i)=2,449.$$

Критерий Стьюдента для каждого коэффициента q=5%,N=16

$t_1=0,625/2,449=0,225$ $t_3=13,125/2,449=5,36$

$t_2=4,375/2,449=1,79$ $t_{кр}=2,12$

Значимыми коэффициентами оказались $b_0=81,875$ $b_3=13,125$, которые и включим в уравнение регрессии:

$$\hat{y}=81,875+13,125Z_3..$$

Проверка адекватности модели

По уравнению регрессии подсчитываем величину ***y*** для каждой точки плана матрицы:

$$\hat{y_1}=\hat{y_2}=\hat{y_3}=\hat{y_4}=81{,}875-13{,}125=68{,}75;$$
$$\hat{y_5}=\hat{y_6}=\hat{y_7}=\hat{y_8}=81{,}875+13{,}125=95.$$

$$S_{ад}^2=(68{,}75-90)^2+(68{,}75-60)^2+(68{,}75-55)^2/(8-2)+(68{,}75-90)^2+(95-105)^2+$$
$$+(95-95)^2+(95-80)^2/(8-2)+(95-100)^2/(8-2)=178{,}12$$

Рассчитываем F-отношение:

$$F=S_{ад}^2/S^2(y) \text{ или } S^2(y)/S_{ад}^2=288/1{,}78=1{,}61.$$

Определяем по таблице (приложение 3) $F_{кр}$ для $f_1=6=8-2$

$$f_2=8(3-1)=16:$$
$$F_{кр}=2{,}74.$$

Гипотеза адекватности принимается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика выбора и оптимизации контролируемых параметров, технологических параметров. М., 1978.
2. Грачев Ю.П. Математические методы планирования экспериментов / Ю.П. Грачев. М, 1979.
3. Уартман К. В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Уартман, В. Лецкий, Э. Шефер. М., 1977.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА
ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические указания к практической работе
по курсу «Основы технологии машиностроения»,
для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 15.03.01 «Машиностроение» дневной и заочной форм обучения

Приложение 1

ЖУРНАЛ
планирования эксперимента

№	Контролируемые параметры, факторы				Результаты эксперимента			
	X_1	X_2	…	$X_к$	$У_1$	$У_2$	…	$У_к$
1								
2								
3								
4								
5								
.								
.								
.								
.								
.								
$2^к$								

Приложение 2

ТАБЛИЦА КРИТЕРИЕВ СТЬЮДЕНТА

Z_i	при q в процентах					
	20	10	5	2	1	0,5
1	3,0700	6,3130	12,7060	31,820	63,656	127,656
2	1,8850	2,9200	4,3020	6,964	9,924	14,089
3	6377	35340	3,182	4,540	5,840	7,458
4	5332	13180	2,776	3,746	4,604	5,597
5	4759	01500	2,570	3,649	0321	4,773
6	1,4390	1,943	2,4460	3,1420	3,7070	4,316
7	4149	8946	3646	2,998	4995	2293
8	3968	8596	3060	8965	3554	3,832
9	3830	8331	2622	8214	2498	6897
10	3720	8125	2281	7638	1693	5814
11	1,363	1,795	2,201	2,718	3,105	3,496
12	3562	7823	1788	6810	0845	4284
13	3502	7709	1604	6503	1123	3725
14	3450	7613	1448	6245	2,976	3257
15	3406	7530	1314	6025	9467	2860
16	1,3360	1,7450	2,1190	2,5830	2,9200	3,2520
17	3334	7396	1098	5668	8982	2224
18	3304	7341	1009	5514	8784	1966
19	3277	7291	0930	5395	8609	1737
20	3253	7247	08600	5280	8453	1534
21	1,3230	1,7200	2,0790	2,5170	2,8310	3,1350
22	3212	7117	0739	5083	8188	1188
23	3195	7139	0687	4999	8073	1040
24	3178	7109	0639	4922	7969	0905
25	3163	7081	0595	4851	7874	0782
26	1,315	1,705	2,059	2,478	2,778	3,0660
27	3137	7033	0518	4727	7707	0565
28	3125	7011	0484	4671	7633	0469
29	3114	6991	0452	4620	7564	0360
30	3104	6973	0423	4573	7500	0298
32	1,3080	1,6930	2,0360	2,4480	2,7380	3,0140
34	3070	6909	0322	4411	7284	9520
36	3050	6883	0281	4345	7195	9,490
38	3042	6860	0244	4286	7116	9808
40	3031	6839	0211	4233	7045	9712
42	1,320	1,682	2,018	2,418	2,6980	2,6930
44	3011	6802	0154	4141	6923	9555
46	3002	6767	0129	4102	6870	9488
48	2994	6772	0106	4056	6822	9426
50	2987	6759	0086	4033	6778	9370

Приложение 3

ТАБЛИЦЫ КРИТЕРИЯ ФИШЕРА
q=5%

	f_1						
	1	2	3	4	5	6	7
1	161	200	216	225	230	234	237
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,99
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01
12	4,75	3,88	3,49	3,29	3,11	3,00	2,92
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77